Concours commun marocain 2019 *

Filière PSI-math I

Ce corrigé détaillé vise à donner une approche pédagogique qui ne se contente pas seulement de résoudre les questions du sujet, mais essaye de mettre le point sur les parties de cours utilisées et les astuces classiques que le candidat doit retenir en travaillant cette épreuve. Aussi, comme on dit le diable est dans les détailles, les élèves doivent savoir détailler les étapes des problèmes qu'ils entament parce que c'est là la compréhension vraie et correcte des mathématiques.
Pour toute remarque, suggestion ou erreur veuillez me contacter sur mon email. Merci.

EXERCICE

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction g_n de la variable réelle x par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. **Question**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction g_n est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Rappel : Si une fonction f est integrable sur un interval I alors $\int_I f(t)dt$ converge, auquel cas : si $I = [a, +\infty[$, $\int_I f(t)dt = \lim\limits_{x+\infty} \int_a^x f(t)dt$. Attention : la réciproque n'est pas vrai.

Réponse :
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a
• g_n est continue positive sur $[0, +\infty[$.
• au voisinage de $+\infty$: $g_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
donc g_n est intégrable sur $[1, +\infty[$
Donc g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx \quad \text{et} \quad I_n(a) = \int_0^a g_n(x)dx.$$

2.1. **Question**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a > 0$, établir une relation entre les intégrales $I_n(a)$ et $I_{n+2}(a)$ à l'aide d'une intégration par parties puis en déduire que $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

*Auteur du corrigé : Ratbi My Lhassan, CPGE My Youssef Rabat- email : mylhassan@yahoo.fr

Réponse :

Pour l'intégration par partie on pose : $u = x^{n+1}$ et $v' = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+2}(a) &= \int_0^a x^{n+2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \int_0^a x^{n+1}x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \left[-x^{n+1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^a + (n+1)\int_0^a x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= -a^{n+1}\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) + (n+1)I_n(a)
\end{aligned}$$

Donc

$$I_{n+2}(a) = -a^{n+1}\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) + (n+1)I_n(a). \qquad (*)$$

Déduction :

$-a^{n+1}e^{\left(-\frac{a^2}{2}\right)} \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$

On a g_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$ est convergente et on a $I_n = \lim\limits_{a+\infty}\int_0^a g_n(x)dx = \lim\limits_{x+\infty} I_n(a)$. Donc : en fait tendre a vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient

$$I_{n+2} = (n+1)I_n. \qquad (**)$$

2.2. **Question**

En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Réponse :

On a la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0.1)$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Si f est pair alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

Et comme $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, on obtient $2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}} = 1$

d'où : $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2.3. **Question**

Calculer la valeur de l'intégrale I_1 et montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \text{ et } I_{2n+1} = 2^n n!$$

Réponse :

On a $I_1 = \int_0^{+\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{+\infty} = 1$.

Montrons par récurrence sur n que : $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$

Pour $n=0$ on a $I_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $I_1=1$ c'est vrai,
supposons le résultat vrai à l'ordre n et montrons le à l'ordre $n+1$
on a d'après $(**)$: $I_{2n+2}=(2n+1)I_{2n}$ et $I_{2n+3}=(2n+2)I_{2n+1}$.
donc : $I_{2n+2}=(2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+3}=(2n+2)2^n n!$.

On a multiplié par $(2n+2)$ en haut et en bas.

donc : $I_{2n+2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)2^n n!}$ et $I_{2n+3}=2^{n+1}(n+1)!$. d'où :
$I_{2n+2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}$ et $I_{2n+3}=2^{n+1}(n+1)!$.

3. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x)=\begin{cases} g_1(x) & \text{si} \quad x\geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$.

3.1. **Question**

Démontrer que g est une densité de probabilité.

Réponse :

$xe^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

On a $g(x)=\begin{cases} x\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si} \quad x\geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ donc : g est continue positive

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)=\int_0^{+\infty} g_1(x)dx=1$

d'où : g est une densité de probabilité.

Rappel :
- $E[X]$ existe si, et seulement si, $\int_{\mathbb{R}} xg(x)dx$ converge, au quel cas $E[X]=\int_{\mathbb{R}} xg(x)dx$
- $V[X]$ existe si, et seulement si, $\int_{\mathbb{R}} x^2g(x)dx$ converge, au quel cas $V[X]=\int_{\mathbb{R}} x^2g(x)dx-\left(\int_{\mathbb{R}} xg(x)dx\right)^2$

3.2. **Question**

Soit X une variable aléatoire réelle admettant g comme densité de probabilité. Justifier que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$ puis préciser leur valeur.

Réponse :

- On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xg(x)dx=\int_0^{+\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=I_2$ est convergente par suite $E[X]$ existe et vaut $I_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2g(x)dx=\int_0^{+\infty} x^3\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ est convergente et vaut $I_3=2$

D'où : $V[X]=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2g(x)dx-\left(\int_{\mathbb{R}} xg(x)dx\right)^2=I_3-I_2^2=\frac{4-\pi}{2}$.

3.3. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives des variables aléatoires X et $Y=X^2$.

Remarque :
Si $x>0$, on a $\omega\in(X^2\leqslant x)$
$\Leftrightarrow X^2(\omega)\leqslant x$
$\Leftrightarrow -\sqrt{x}\leqslant X(\omega)\leqslant\sqrt{x}$
$\Leftrightarrow \omega\in(-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x})$
donc $P(X^2\leqslant x)=P(-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x})$
$=P(X\leqslant\sqrt{x})-\underbrace{P(X\leqslant-\sqrt{x})}_{=0}$
$=P(X\leqslant\sqrt{x})=F(\sqrt{x})$

3.3.1. **Question**

Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de F et en déduire que Y est une variable à densité.

Réponse :

Soit $x\in\mathbb{R}$,

Si $x < 0$ alors $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x) = 0$.
Si $x \geqslant 0$ alors $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x})$.

Donc : $G(x) = \begin{cases} F(\sqrt{x}) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Déduction :
On a F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc G l'est aussi, par suite Y est une variable aléatoire à densité.

3.3.2. **Question**

Reconnaitre la loi de Y et donner la valeur de son espérance $E(Y)$ et de sa variance $V(Y)$.

Rappel
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si X admet pour densité la fonction f définie par
$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
La fonction de répartition de X est donnée par
$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Réponse :

On a $\forall x \geqslant 0, G(x) = F(\sqrt{x}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\sqrt{x}} g(t)dt = \int_0^{\sqrt{x}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$

donc $G(x) = \left[-\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{x}} = 1 - \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

Donc $G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

On reconnait alors la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et par suite d'après le cours $E[X] = 2$ et $V(X) = 4$.

Fin de l'exercice

PROBLÈME

Divers applications de la formule de Taylor avec reste intégrale

Notations

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$).

Pour tout $(r,k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leqslant r$, on note $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}$ le coefficient binomial défini par $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{r!}{k!(r-k)!}$

PARTIE I

Formule de Taylor avec reste intégrale ; apllication

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe C^{n+1}. Soit $(a,b) \in I^2$; on pose

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

1.1. **Formule de Taylor avec reste intégrale**

1.1.1. **Question**

Montrer que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $R_{k-1} = \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$.

Réponse :

Soit $k \in\in \{1,\ldots,n\}$, à l'aide d'une integration par partie on a

On pose $u' = (b-t)^{k-1}$ et $v = f^{(k)}(t)$

$$\begin{aligned} R_{k-1} &= \int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)dt \\ &= \left[-\frac{(b-t)^k}{(k)!} f^{(k)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt \\ &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k \end{aligned}$$

1.1.2. **Question**

En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(t) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Réponse :

Par récurrence sur n.

Pour $n=0$, on a $f(b)=f(a)+\int_a^b f'(t)dt$, c'est vraie.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai à l'ordre $n-1$ et montrons le à l'ordre n.
Par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(t)+R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(t)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(t)+R_n \end{aligned}$$

D'où le résultat.

1.2. **Application au calcul de la somme d'une série**
On considère la fonction $\psi :]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t>0, \psi(t)=\ln(1+t)$$

1.2.1. **Question**

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction ψ est n fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que $\forall t>-1, \psi^{(n)}(t)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}$.

Réponse :
ψ est une fonction composée de fonctions usuelles donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et par une récurrence immediate on a la formule demandé.

1.2.2. **Question**

Justifier que la série numérique $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

Réponse :
C'est une série alternée qui vérifie le critère special des series alternées, donc c'est une série convergente.

1.2.3. **Question**

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale (1) à la fonction ψ sur un intervalle à préciser, déterminer la somme de la série précédente.

Réponse :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, On a ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, on applique la formule de taylor avec reste integral l'ordre n entre 0 et 1 on a

$\psi^{(0)}(0)=\psi(0)=0$

$$\psi(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\psi^{(k)}(0)+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\psi^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}(k-1)! + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n} \frac{1}{(1+t)^n} dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n} dt$$

$\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{(1+t)^n} \leqslant 1$

Et on a $\forall t \in [0,1], \left| \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \dfrac{(1-t)^n}{(1+t)^n} \right| \leqslant \dfrac{(1-t)^n}{n}$

donc $\left| \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n}{(1+t)^n} dt \right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Et comme $\psi(1) = \ln(2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n}{(1+t)^n} dt$

et les quantité en jeu sont convergente, on fait tendre n vers $+\infty$ on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)}$$

PARTIE II

Application au développement en série entière d'une fonction absolument monotone

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-a,a[$, avec $a > 0$, vérifiant :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times]-a,a[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times]-a,a[$, on pose $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$

2.1. **Question**

Montrer que pour tout $x \in]-a,a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

Réponse :
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times]-a,a[$,
Si $x = 0$ alors le résultat est bien vérifié.
Si $x \neq 0$, on a f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$, on applique la formule de taylor avec reste integral l'ordre n entre 0 et x, on a

On fait le changement de variable $t = ux$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^1 \frac{(x-ux)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux) x du$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

2.2. **Question**

Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant R_n(x) \leqslant f(x)$.

Réponse :

On a $\forall x \in [0, a[, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geqslant 0$ et $R_n(x) \geqslant 0$

et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$.

donc $0 \leqslant R_n(x) \leqslant f(x)$

2.3. **Question**

Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$, la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente.

Rappel : Une série à terme positifs converge si, et seulement si, la suite de ses partielles est majorée.

Réponse :

Soit $x \in [0, a[$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leqslant f(x)$

donc la suite des sommes partielle $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)_n$ est majorée,

or la série à $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est une série à termes positifs.

d'où $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente.

2.4. **Question**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$ et tout $y \in]x, a[$,

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y} \right)^{n+1} R_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y} \right)^{n+1} f(y).$$

Réponse :

On a $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times] - a, a[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$ donc les fonctions $f^{(n)}$ sont croisante sur $] - a, a[$ pour tout tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a[$ et $y \in]x, a[$ on a $\forall u \in [0, 1], xu \leqslant yu$

donc $\forall u \in [0, 1], f^{(n)}(xu) \leqslant f^{(n)}(yu)$ ($f^{(n)}$ est croissante.)

donc $\forall u \in [0, 1], (1 - u)^n f^{(n)}(xu) \leqslant (1 - u)^n f^{(n)}(yu)$

donc $\int_0^1 (1 - u)^n f^{(n)}(xu) du \leqslant \int_0^1 (1 - u)^n f^{(n)}(yu) du$

donc

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - u)^n f^{(n+1)}(xu) du \\ &\leqslant \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - u)^n f^{(n+1)}(yu) du \end{aligned}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} \frac{y^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(yu)du$$
$$= \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$$

Et d'après 2.2 on a $R_n(y) \leqslant f(y)$, d'où le résultat.

2.5. **Question**

> En déduire que, pour tout $x \in [0, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Soient $x \in [0, a[$ et $y \in]x, a[$ on a $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$

or $\left(\frac{x}{y}\right) < 1$ donc $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
d'où $R_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
or $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$,d'après la question 2.1 et on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

2.6. **Question**

> Montrer que, pour tout $x \in]-a, 0[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} |x|^{n+1}$ puis en déduire que la série numériques $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente de somme $f(x)$.

Réponse :
Soient $x \in]-a, 0[$ et $n \in \mathbb{N}$,
on a $\forall u \in [0,1], xu \in [x, 0]$ donc $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(0)$ car $f^{(n+1)}$ est croissante, et on a aussi $0 \leqslant f^{(n+1)}(xu)$

$(1-u)^n \geqslant 0.$

donc $\forall u \in [0,1], 0 \leqslant (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) \leqslant (1-u)^n f^{(n+1)}(0)$.
donc

$$0 \leqslant \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du \leqslant \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(0)du$$
$$\leqslant f^{(n+1)}(0) \int_0^1 (1-u)^n du$$

D'où

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du \right|$$
$$\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(0) \underbrace{\int_0^1 (1-u)^n du}_{\frac{1}{n+1}}$$

$$\leqslant \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

Et on a $\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car c'est le terme général de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ qui est convergente d'après 2.3, d'où $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ 0,

par suite quand n tend vers $+\infty$ on a $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

PARTIE III

Étude d'une équation différentielle linèaire

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation différentielle

$$y^{(4)} - y = 0 \qquad (E)$$

On désigne par Σ l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que φ soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

3.1. **Question**

Montrer que Σ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Réponse :
Soit $f \in \Sigma$ c-à-d une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, donc f est 4-fois dérivable et puisque $f^{(4)} = f$, on aura $f^{(4)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$, d'où $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{C})$
par suite $\Sigma \subset C^4(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
On a alors Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{C})$, en effet :
• On a la fonction nulle est solution de (E) donc $\Sigma \neq \emptyset$.
• Soient $f, g \in \Sigma, \alpha \in \mathbb{C}$, on a $(\alpha f + g)^{(4)} = \alpha f^{(4)} + g^{(4)} = f + g$
donc $f + g \in \Sigma$.
3.2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = e^{\lambda x}.$$

3.2.1. **Question**

Montrer que la fonction f_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, $\lambda^4 = 1$.

Réponse :
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$,
on a $f_\lambda \in \Sigma \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda^{(4)}(x) = f_\lambda(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda^4 e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \Leftrightarrow \lambda^4 = 1$.

3.2.2. **Question**

Préciser toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) de la forme f_λ, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

On f_λ solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, $\lambda^4 = 1$
or les solution réels de l'équation $\lambda^4 = 1$ sont exactement $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$, et par suite les solutions réelles de (E) de la forme f_λ sont exactement f_1 et f_{-1}.

3.3. **Un minorant de la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ**

3.3.1. **Question**

Les notations étant celles de la question 3.2. précédente ; montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 sont des complexes deux à deux distincts alors la famille $(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}, f_{\lambda_4})$ est libre.

Réponse :

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}^4$, tels que $\sum\limits_{k=0}^{4} \alpha_k f_{\lambda_k} = 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \alpha_3 e^{\lambda_3 x} + \alpha_4 e^{\lambda_4 x} = 0$
on dérive 4 fois et on remplace x par 0 on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = 0 \\ \alpha_1\lambda_1 & + & \alpha_2\lambda_2 & + & \alpha_3\lambda_3 & + & \alpha_4\lambda_4 & = 0 \\ \alpha_1\lambda_1^2 & + & \alpha_2\lambda_2^2 & + & \alpha_3\lambda_3^2 & + & \alpha_4\lambda_4^2 & = 0 \\ \alpha_1\lambda_1^3 & + & \alpha_2\lambda_2^3 & + & \alpha_3\lambda_3^3 & + & \alpha_4\lambda_4^3 & = 0 \end{array}\right.$$

C'est un système de Cramer d'inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}^4$ dont le determinant est un determinant de Vandermonde de taille 4,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (\lambda_i - \lambda_j)$$

qui est non nul puisque les λ_i sont deux à deux distincts, donc la seule solution est la solution nulle, c-à-d que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

3.3.2. **Question**

En déduire que le $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ est de dimension $\geqslant 4$.

Réponse :

on a la famille $(f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i})$ est une famille libre de Σ. d'où si Σ est de dimension finie alors $\dim \Sigma \geqslant \operatorname{card}\{f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i}\} = 4$.

- $1, -1, i, -i$ sont les racines de $\lambda^4 = 1$
- Σ n'est pas nécessairement de dimension finie.

3.4. **Étude d'une application linéaire**

Soit t_0 un réel ; on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{C}^4 \\ & \varphi & \longmapsto & (\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \varphi''(t_0), \varphi'''(t_0)) \end{array}$$

3.4.1. **Question**

Vérifier que Δ est une application linéaire.

Réponse :
Soient φ, ψ deux solutions de (E), et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha\varphi+\psi) &= ((\alpha\varphi+\psi)(t_0), (\alpha\varphi+\psi)'(t_0), (\alpha\varphi+\psi)''(t_0), (\alpha\varphi+\psi)'''(t_0)) \\
&= (\alpha\varphi(t_0)+\psi(t_0), \alpha\varphi'(t_0)+\psi'(t_0), \alpha\varphi''(t_0)+\psi''(t_0), \alpha\varphi'''(t_0)+\psi'''(t_0)) \\
&= \alpha(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \varphi''(t_0), \varphi'''(t_0)) + (\psi(t_0), \psi'(t_0), \psi''(t_0), \psi'''(t_0)) \\
&= \alpha\Delta(\varphi) + \Delta(\psi)
\end{aligned}$$

Dans la suite, on cherche à établir que l'application Δ est injective ; pour cela on considère une application $g \in \Sigma$ telle que $\Delta(g) = (0,0,0,0)$, c'est à dire que $g^{(k)}(t_0) = 0$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$.

3.4.2. **Question**

Montrer que pour tout réel $x, g(x) = \displaystyle\int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6} g(s)ds$.

Réponse :
On a g est de classe $\mathcal{C}^4$, la formule de Taylor avec reste integral à l'ordre 3 entre t_0 et x donne

$$g(x) = g(t_0) + g'(t_0)x + \frac{g''(t_0)}{2}x^2 + \frac{g'''(t_0)}{3!}x^3 + \int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6} g^{(4)}(s)ds$$

Comme $g \in \Sigma$ et $\Delta(g) = 0$
on a $g^{(4)} = g$ et $g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = g'''(t_0) = 0$, d'où le résultat.

3.4.3. Soit t un réel distinct de t_0 ; on note I_t le segment d'extrémités t_0 et t et on pose

$$M_t = \sup_{s \in I_t} |g(s)|, \alpha_t = \frac{|t-t_0|^3}{6}$$

(i) **Question**

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I_t$, $|g(x)| \leqslant M_t \alpha_t^k \dfrac{|x-t_0|^k}{k!}$.

Réponse :
Par récurrence sur k,

Pour k=0, on a $\forall x \in I_t, |g(x)| \leqslant M_t = M_t \alpha_t^0 \dfrac{|t-t_0|^0}{0!}$, le résultat est vrai.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai à l'ordre k et montrons le à l'ordre $k+1$.

Soit $x \in I_t$,

$$|g(x)| = \left| \int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6} g(s)ds \right|$$

Notation :
$\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} f(t)dt$
on a : si $a \leqslant b$,
$\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$
et si $b \leqslant a$,
$\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$
on a

$$\leqslant \int_{[t_0,x]} \left|\frac{(x-s)^3}{6}\right| |g(s)|ds$$
$$\leqslant \alpha_t \int_{[t_0,x]} |g(s)|ds$$

Remarque : pour le calcul de la dernière integral on discute deux cas : $t < t_0$ et $t_0 < t$.

Par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leqslant \alpha_t \int_{[t_0,x]} M_t\alpha_t^k \frac{|s-t_0|^k}{k!}ds \\ &= M_t\alpha_t^{k+1}\int_{[t_0,x]} \frac{|s-t_0|^k}{k!}ds \\ &= M_t\alpha_t^{k+1}\frac{|x-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(ii) **Question**

Justifier que la suite $\left(\alpha_t^n \dfrac{|t-t_0|^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Réponse :

la série exponentielle $\sum \alpha_t^n \dfrac{|t-t_0|^n}{n!}$ est convergente, donc son terme général tend vers 0 c-à-d $\alpha_t^n \dfrac{|t-t_0|^n}{n!} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(iii) **Question**

En déduire que $g(x) = 0$.

Réponse :

$\forall x \in I_t, |x-t_0| \leqslant |t-t_0|$

Soit $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant_0, \alpha_t^n \dfrac{|t-t_0|^n}{n!} \leqslant \varepsilon$.
Soit $n \geqslant n_0$ on a
$\forall x \in I_t, \forall n \in \mathbb{N}, |g(x)| \leqslant \alpha_t^n \dfrac{|x-t_0|^n}{n!} \leqslant \alpha_t^n \dfrac{|t-t_0|^n}{n!}$
donc $\forall x \in I_t, |g(x)| \leqslant \alpha_t^n \dfrac{|t-t_0|^n}{n!} \leqslant \varepsilon$.
donc $\forall x \in I_t, |g(x)| \leqslant \varepsilon$.
donc $|g(t)| = |\lim\limits_{x\to t} g(x)| \leqslant \varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $g(t) = 0$.

3.4.4. **Question**

Conclure que Δ est injective et que la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ est égale à 4 puis justifier que

$$\Sigma = \{x \mapsto ae^x + be^{-x} + ce^{ix} + de^{-ix}; (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4\}.$$

Réponse :

D'après la question 3.4.2,

$$\forall g \in \Sigma, \Delta(g) = 0 \implies g = 0$$

ceci donne que l'application linéaire Δ est injective.

Une application d'un ensemble A dans $f(A)$ est toujours surjective, on dit surjective par construction

donc application linéaire $\begin{array}{rcl} \Sigma & \longrightarrow & \Delta(\Sigma) \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \varphi''(t_0), \varphi'''(t_0)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel car injective d'après ce qui précède et surjective par construction.
d'où Σ est un espace vectoriel de dimension finie et sa dimension vérifie $\dim \Sigma = \dim \Delta(\Sigma)$.
et comme $\Delta(\Sigma)$ est un sev de $\mathbb{C}^4$, on a $\dim \Sigma = \dim \Delta(\Sigma) \leqslant 4$, or $\dim \Sigma \geqslant 4$, d'où $\dim \Sigma = 4$.
Finalement, le fait que $(f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i})$ est une famille libre de Σ, de cardinal $4 = \dim \Sigma$ donne que $(f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i})$ est une base de Σ, d'où
$\Sigma = \text{vect}\{f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i}\} = \{x \mapsto ae^x + be^{-x} + ce^{ix} + de^{-ix}; (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4\}$.

PARTIE IV

Application à l'étude d'une équation intégrale

L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 f(t) dt.$$

Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une telle application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \int_0^x (x-t)^n f(t) dt.$$

4.1. **Question**

Montrer que la fonction g_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de f.

Réponse :
On a $\forall x \in \mathbb{R}, g_0(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) dt$, donc g_0 est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on a g_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g_0' = f$.
4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

4.2.1. **Question**

Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k \int_0^x t^{n-k} f(t)$

Réponse :
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \int_0^x (x-t)^n f(t) dt \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-t)^{n-k} f(t) dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k \int_0^x t^{n-k} f(t)dt$$

4.2.2. **Question**

En déduire que la fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g_n' = ng_{n-1}$.

Réponse :

Remarques

- Il faut séparer le cas de $k = 0$ avant de dériver la somme.
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = 0$ d'après la formule du binôme appliquer à $(1 + (-1))^n$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(x^k \int_0^x t^{n-k} f(t)dt \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(x^k \int_0^x t^{n-k} f(t)dt \right)' \\
&= (-1)^n x^n f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(kx^{k-1} \int_0^x t^{n-k} f(t)dt + x^k x^{n-k} f(x) \right) \\
&= (-1)^n x^n f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(kx^{k-1} \int_0^x t^{n-k} f(t)dt + x^n f(x) \right) \\
&= (-1)^n x^n f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} kx^{k-1} \int_0^x t^{n-k} f(t)dt \\
&+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^n f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^n f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} kx^{k-1} \int_0^x t^{n-k} f(t)dt \\
&= x^n f(x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} + n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \int_0^x t^{n-k} f(t)dt \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} x^{k-1} \int_0^x t^{n-1-k} f(t)dt \\
&= ng_{n-1}
\end{aligned}$$

4.3. Recherche d'une équation différentielle vérifiée par f

4.3.1. **Question**

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = x + \frac{1}{6} g_3(x)$.

Réponse :

D'après la relation (2), on a $f(x) = x + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 f(t)dt = x + \frac{1}{6} g_3(x)$.

4.3.2. **Question**

Justifier que la fonction f est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Réponse :
On a $g_1' = g_0$ et g_0 dérivable donc g_1 deux fois dérivable et aussi $g_2' = 2g_1$ donc g_2 est trois dérivable et par suite $g_3' = 3g_2$ donne que g_3 est 4 fois dérivable, d'où $f(x) = x + \frac{1}{6}g_3(x)$ est 4 fois dérivable, et
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + \frac{1}{6}g_3'(x) = 1 + \frac{1}{6}3g_2(x) = 1 + \frac{1}{2}g_2(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{2}g_2'(x) = g_1(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, f'''(x) = g_1'(x) = g_0(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = g_0'(x) = f(x)$ d'où f est solution de l'équation (E).

4.3.3. **Question**

En déduire qu'il existe des complexes a, b, c et d telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ae^x + be^{-x} + ce^{ix} + de^{-ix}.$$

Réponse :
On a f est solution de (E) donc $f \in \Sigma$, donc d'après 3.3.4 on a le résultat.

4.4. **Question**

Déterminer les valeurs prises par $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f'''(0)$ et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \sinh x)$$

où sinh désigne la fonction sinus hyperbolique.

Réponse :
On a $\forall n \in \mathbb{N}, g_n(0) = 0$ donc $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 0$
et comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ae^x + be^{-x} + ce^{ix} + de^{-ix}$.
On prenant $x = 0$ on obtient

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - b + ic - id = 1 \\ a + b - c - d = 0 \\ a - b - ic + id = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c + d = 0 \\ 2a + 2ic = 1 \\ 2a - 2ic = 0 \end{cases}$$

donc

$$a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{4},\ c = \frac{1}{4i},\ d = -\frac{1}{4i}.$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{4i}(e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2}\sinh(x) + \frac{1}{2}\sin(x) \end{aligned}$$

4.5. **Question**

Synthèse : Vérifier que la solution trouvée à la question 4.4. précédente vérifie bien l'équation intégrale (2).

Réponse :

Vérification facile.

Fin de l'épreuve